

NOM :	VI.Tracés des courbes géométriques particulières	PJ
NOM :	VI.Tracés des courbes géométriques particulières	PJ

Ces courbes jouent un rôle fondamental et sont directement liées à certaines technologies : engrenages, filetages, ressorts, etc. De ce fait, elles reviennent régulièrement dans les tracés ou dans leur définition.

Les tracés développés dans les paragraphes suivants sont propres au dessin industriel manuel.

En CAO/DAO, il n'existe pas, en général, de commandes pour réaliser ces tracés. En cas d'usage fréquent, il peut être judicieux de programmer une commande spéciale en utilisant certains langages développés spécialement pour la CAO/DAO (autolisp...).

1. Les développantes

a) Définition

La courbe ou la trajectoire décrite par un point appartenant à une corde ou un fil que l'on enroule, ou l'on déroule, autour d'un objet (segment, polygone, cercle...) est appelée développante de l'objet.

Les développantes

La trajectoire d'un point M appartenant à un fil (ou corde), enroulée sur un objet (segment, polygone, cercle...) est appelée développante de l'objet.

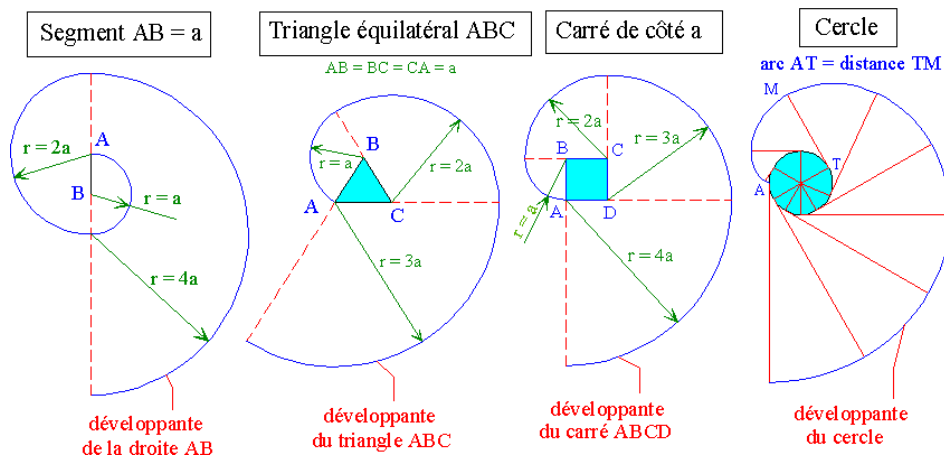


Figure 33

Exemples :

développante d'un segment AB,
développante d'un triangle,
développante d'un carré de côté a,
développante d'un cercle

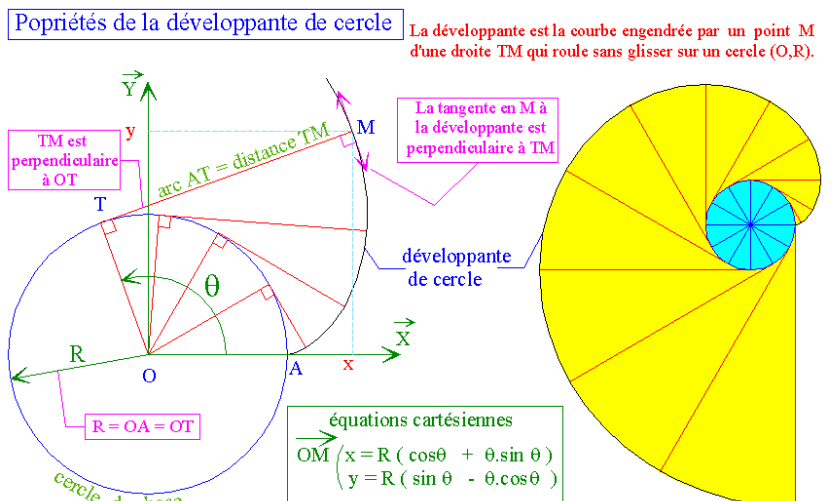
Erreur ! Signet non défini.

Remarque : la développante de cercle est la plus connue de toutes les développantes. Elle est à la base de la majorité des dentures d'engrenages utilisées industriellement et normalisées internationalement (ISO...).

b) Propriétés et construction de la développante de cercle

Propriétés :

Figure 34



Pour un même cercle toutes les développantes sont identiques ou superposables. Autrement dit à un cercle de base donné existe un seul profil en développante possible.

Construction :

ordre des tracés:

- diviser le cercle en "n" parties égales ($n=12$; 18...) et repérer les points correspondants,
- tracer les tangentes en chacun des points précédents,
- pour chacun des points, déterminer ou calculer la longueur des arcs AT,
- reporter les longueurs obtenues sur les tangentes correspondantes $AT = TM$,
- tracer la développante en joignant tous les points (M) avec un pistolet.**

2. Les cycloïdes

a) Cycloïde

Définition : une cycloïde est la courbe ou la trajectoire engendrée par un point (M) appartenant à un cercle roulant sans glisser sur une droite (AB).

Propriété : pour un cercle donné, les trajectoires ou cycloïdes de tous les points de la circonférence sont toutes identiques ou superposables.

Les cycloïdes

La cycloïde est la courbe (ou trajectoire) engendrée par un point M appartenant à un cercle roulant sans glisser sur une droite (AB).

Remarque:
pour un cercle donné, les trajectoires ou cycloïdes de tous les points (M, N, P) sont identiques.

Exemple de tracé:

- tracer le segment AB tel que $AB = \text{circonférence du cercle}$,
- diviser le cercle et la droite en n (ici $n = 12$) parties égales,
- tracer les 1/2 cercles représentant les positions de la roue en $I_1, I_2, \dots$
- Si le cercle central est supposé rouler vers la gauche, le point 1 vient en contact en I_5 et M est en M_5 , le point 2 vient I_4 et M en M_4 , etc.
- les points d'intersection entre les cercles précédents et les parallèles passant par 1, 2, 3, 4 et 5 sont des points de la cycloïde cherchée.
- le point 5' est le symétrique de M_5 , 4' celui de M_4 , etc.

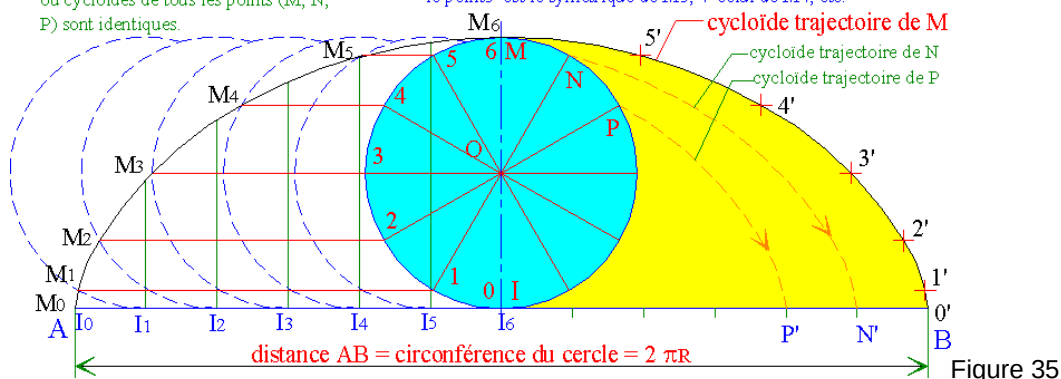


Figure 35

Construction :

ordre des tracés:

- sur une horizontale, tracer le segment AB tel que AB soit égal à la circonférence du cercle,
- diviser le cercle et la droite en un même nombre "n" de parties égales ($n=12$ pour la figure),
- tracer les demi-cercles représentant les diverses positions de la roue en $I_1, I_2, \dots$. Si le cercle roule vers la gauche, les points 1 et M viennent en contact en I_5 et M_5 ; 2 et M viennent en I_4 et $M_4, \dots$,
- les points d'intersection entre les demi-cercles précédents et les horizontales passant par les points 1, 2, 3, 4, et 5 sont des points appartenant à la cycloïde cherchée,
- tracer les points symétriques 1', 2', 3', 4' et 5' correspondants, puis l'ensemble de la cycloïde au pistolet.

b) Epicycloïdes

Définition : une épicycloïde est la courbe ou la trajectoire engendrée par un point (M) appartenant à un cercle roulant sans glisser sur (au-dessus) un autre cercle.

Remarque : les épicycloïdes sont à l'origine de certains profils de dentures normalisées d'engrenages utilisés en micromécanique.

Propriété : pour un cercle donné, les trajectoires ou épicycloïdes de tous les points de la circonférence sont toutes identiques ou superposables.

Les épicycloïdes

Une épicycloïde est une courbe engendrée par un point M appartenant à un cercle (r) roulant sans glisser sur un autre cercle (R).

Tracé, il est analogue à celui des cycloïdes : l'arc AB étant égal à la circonférence du cercle ($2\pi R$) diviser le cercle et l'arc en n (ici 12) parties égales, etc.

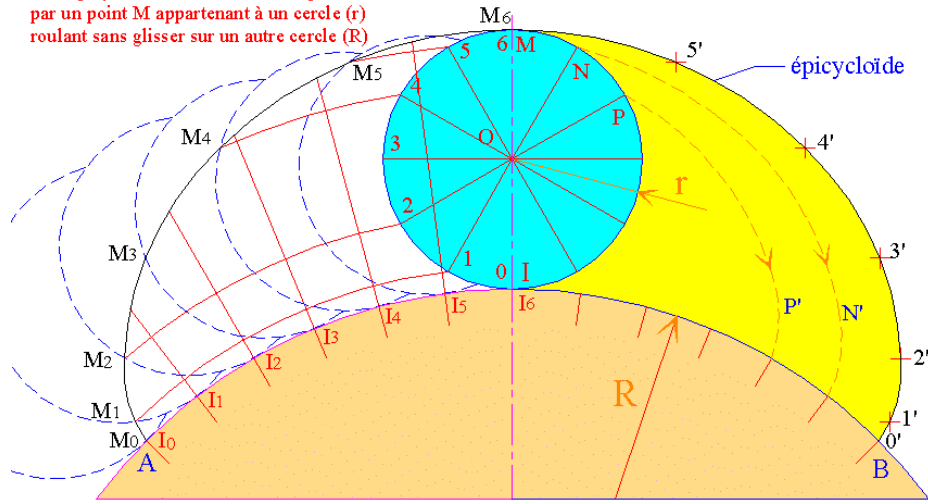


Figure 36

Construction:

ordre des tracés:

le tracé est analogue à celui de la cycloïde du paragraphe précédent, l'arc AB du cercle support de rayon R doit être égal à la circonférence du cercle (rayon r) qui roule sans glisser à sa périphérie (arc $AB = 2\pi r$). Les horizontales du paragraphe précédent sont remplacées par des arcs (1, M_1), (2, M_2), etc., dont le centre commun est celui du cercle support de rayon R .

c) Hypocycloïdes

Définition : une hypocycloïde est la courbe ou la trajectoire engendrée par un point (M) appartenant à un cercle roulant sans glisser à l'intérieur d'un autre cercle.

Propriété : pour un cercle donné, les trajectoires ou hypocycloïdes de tous les points de la circonférence sont toutes identiques ou superposables.

Les hypocycloïdes

Une hypocycloïde est une courbe engendrée par un point M appartenant à un cercle (r) roulant sans glisser à l'intérieur d'un autre cercle (R).

Tracé, il est analogue à celui des cycloïdes:

l'arc AB étant égal à la circonférence du cercle ($2\pi r$) diviser le cercle et l'arc en n (ici 12) parties égales, etc.

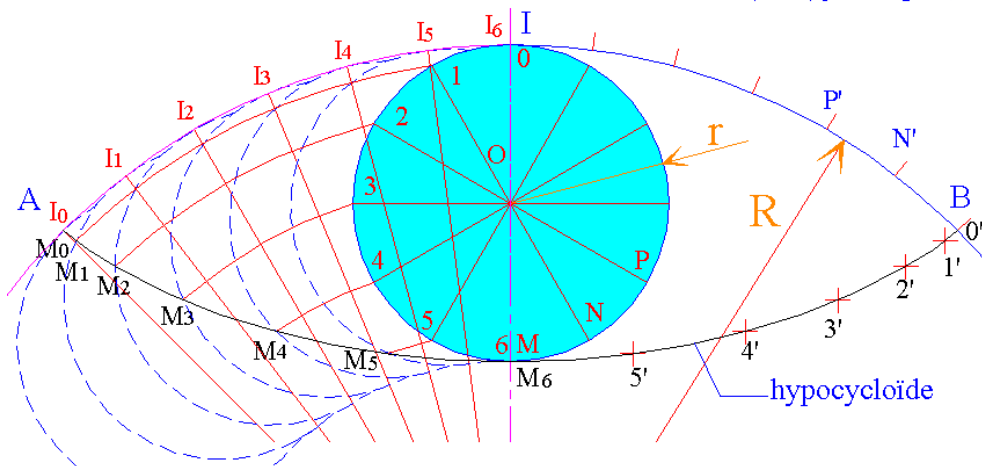


Figure 37

Construction : le tracé est analogue à celui de l'épicycloïde précédente.

3. Les hélices

Définition : une hélice est une courbe dans l'espace ou une courbe 3D. C'est la trajectoire engendrée sur la surface d'un cylindre par un point (M) se déplaçant à vitesse constante parallèlement à l'axe de celui-ci, animé d'un mouvement de rotation uniforme.

Propriété : sur une même génératrice du cylindre, la distance entre deux points consécutifs de l'hélice est appelée pas (p) de l'hélice. Le pas est aussi la distance linéaire parcourue par le point M en un tour du cylindre et se répète à chaque tour.

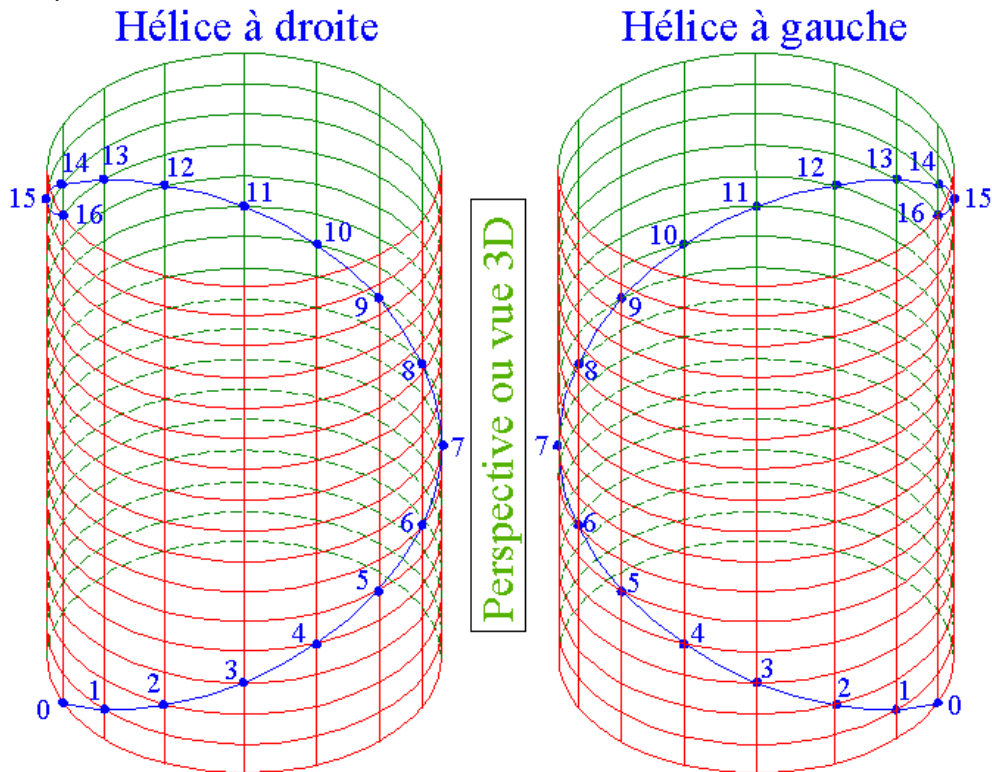


Figure 38

Erreur ! Signet non défini. **Remarque :** les hélices sont à l'origine de la forme des filetages de toutes origines, des ressorts à spires, etc. Les hélices peuvent avoir d'autres formes plus complexes que la forme cylindrique : elles peuvent être coniques, etc...

Construction :

ordre des tracés :

la courbe étant une courbe 3D, il est nécessaire d'utiliser deux vues du cylindre, diviser le cercle de base en "n" parties égales (n=16 pour la figure), sur la vue rectangulaire du cylindre, porter le pas (p) et diviser celui-ci en "n" parties égales, tracer l'hélice point par point, faire le tracé définitif au pistolet.

Remarque : en déroulant l'hélice comme si elle était imprimée sur un papier enroulé autour du cylindre de référence on obtient sa développée. La développée fait clairement apparaître l'angle de l'hélice (α) et sa relation avec le pas (p) :

$$p = \pi \cdot d \cdot \tan \alpha$$

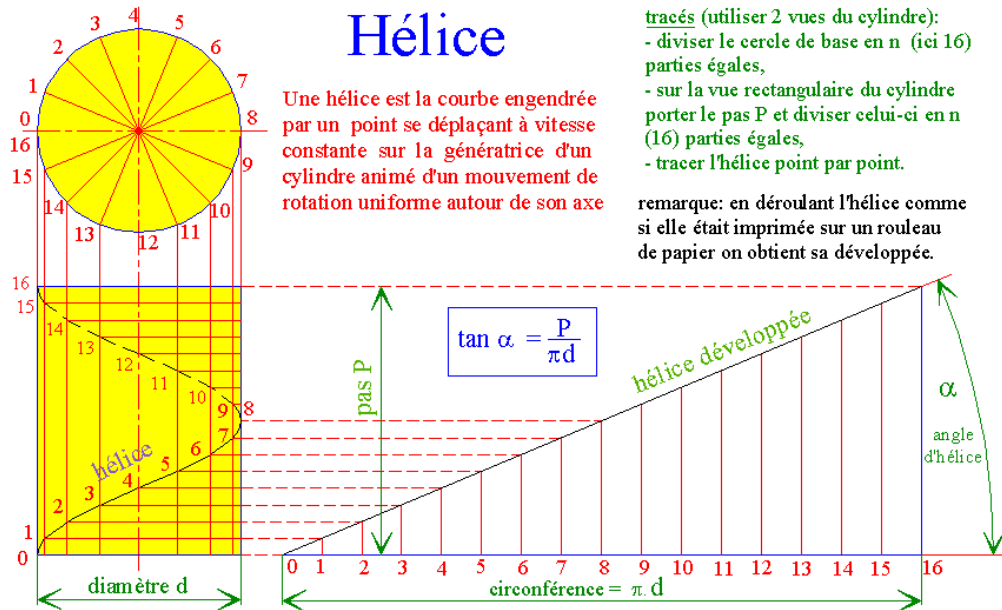


Figure 39

4. Spirale d'Archimède

Définition : une spirale d'Archimède est une courbe engendrée sur la surface d'un disque, animé d'un mouvement de rotation uniforme autour du point O, par un point M se déplaçant à vitesse constante dans une direction radiale ou constante (O, x).

Spirale d'Archimède

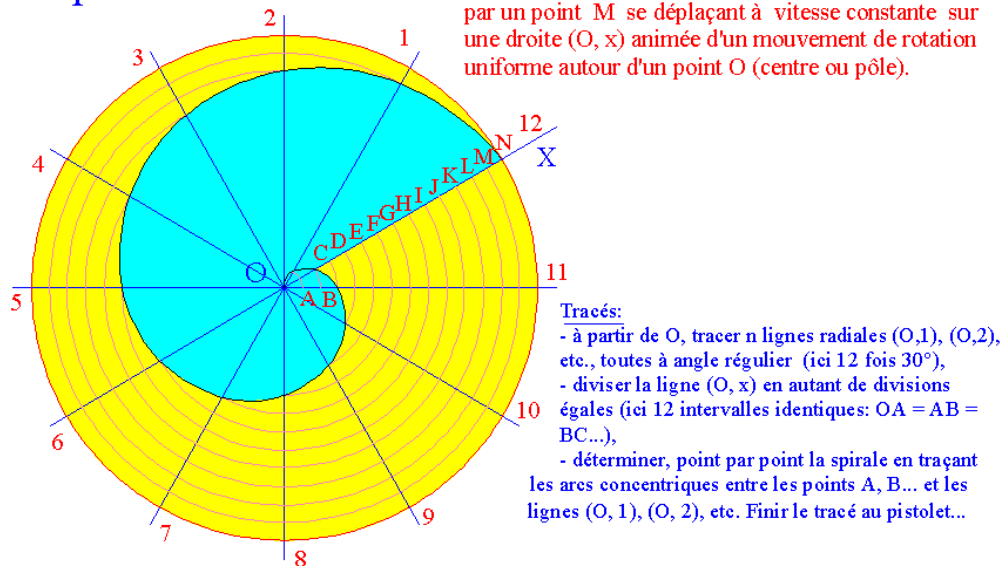


Figure 40

Construction :

ordre des tracés :

à partir du centre O, tracer "n" lignes radiales (O, 1), (O, 2)...(O, n), toutes situées à intervalles angulaires réguliers (12 fois 30° pour la figure proposée),

diviser la direction du mouvement (O, x) en un même nombre de divisions égales (12 intervalles identiques : OA=AB=BC=...),

déterminer point par point la spirale cherchée en traçant des arcs concentriques entre les points A, B, etc. et les lignes (O, 1), (O, 2)..., (O, n),

faire le tracé définitif au pistolet.