CONSERVATOIRE NATIONAL
DES ARTS ET METIERS

INSTITUT
FRANÇAIS DU
FROID
INDUSTRIEL

RAPPELS

DE

MATH

Jean CASTAING-LASVIGNOTTES
Septembre 2001

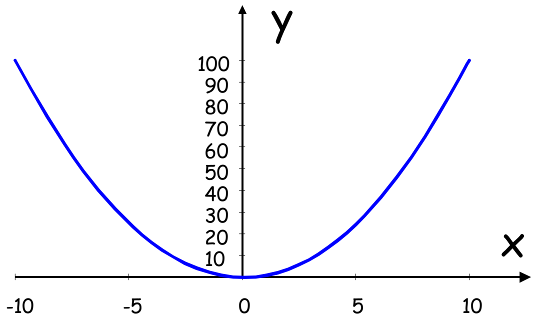
FONCTION, SERIES ET DERIVEES.

FONCTION D'UNE VARIABLE REELLE

Fonction : correspondance qui associe à tout élément **x** de l'ensemble ***A*** (appelé domaine de définition**) un et un seul** élément **y** de l'ensemble **B**.

On note $\forall$ x $\in$ A; y=f(x). A->B.

On choisit généralement une représentation graphique de la fonction f(x) dans un repère orthogonal (0, x, y).

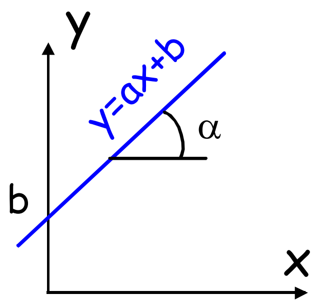


Représentation de la fonction $f(x)=y=x^2$ dans un repère orthogonal.

Il existe une infinité de fonctions différentes mais quelques unes sont bien connues et interviennent souvent en physique.

Les fonctions affines : y=f(x)=ax+b

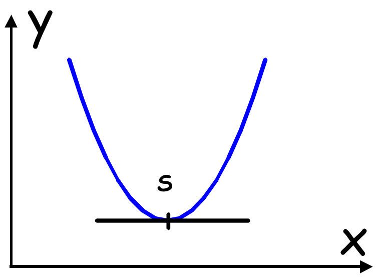
Elles sont représentées par une droite de pente $tg\alpha=a$ et dont l'ordonnée à l'origine est b = f(0)



Représentation d'une fonction affine dans le plan P.

Fonction trinome : $y=ax^2+bx+c$

La représentation est appelée parabole de sommet S et de concavité vers le haut pour a>0 et vers le bas pour a<0.



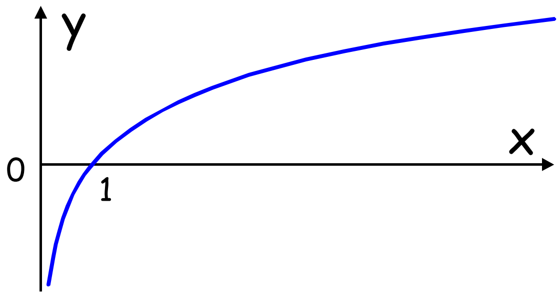
Représentation d'une fonction parabolique dans le plan P.

Fonction logarithme népérien : y=ln(x)

Parmi les propriétés de cette fonction citons :

$$\begin{cases} \ln(1) = 0 \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \\ \ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b) \end{cases}$$

Cette fonction n'est définie que pour x > 0 et sa courbe représentative est la suivante :

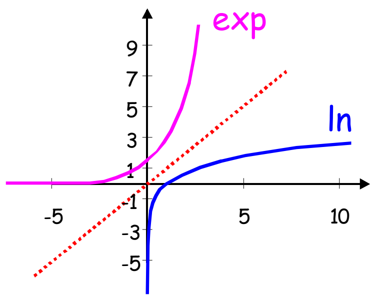


Représentation d'une fonction logarithme népérien dans le plan P.

Fonction exponentielle $y=e^x$

Il s'agit de la fonction inverse de ln(x), c'est à dire que $e^x=f^{-1}[\ln(x)]$.

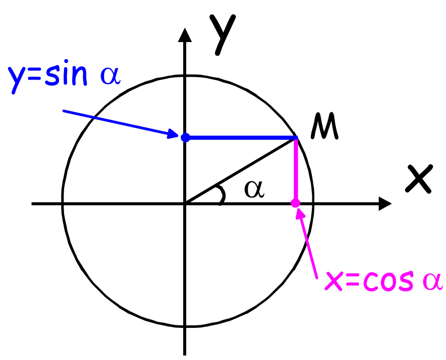
Graphiquement, de ce fait, ln(x) et e^x sont symétriques par rapport à la première bissectrice du plan P.



Représentation d'une fonction exponentielle (symétrique par rapport à la première bissectrice, d'une fonction logarithme népérien) dans le plan P.

Fonctions trigonométriques

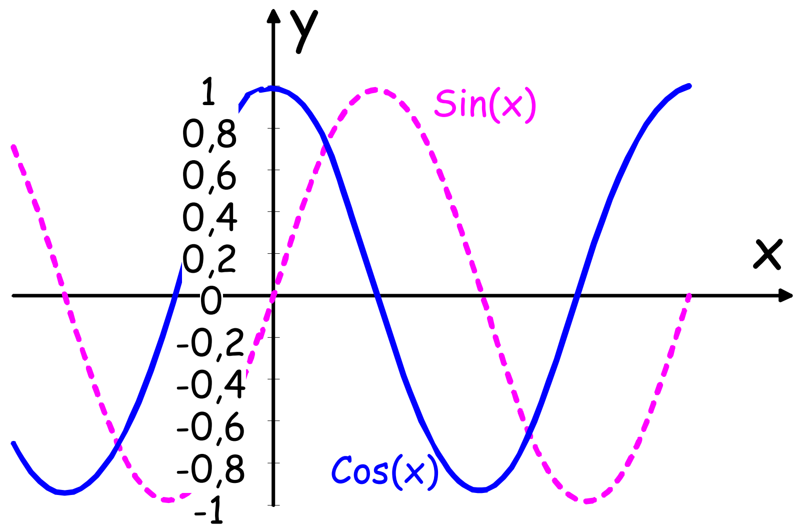
Les fonctions sinus et cosinus représentent la position du point M(x, y) situé sur le cercle trigonométrique (c'est à dire de rayon égal à 1).



Signification des valeurs sinus et cosinus dans le cercle trigonométrique.

Ces fonction sont périodiques de période $\tau=2\pi$, sont bornées entre -1 et +1 et possèdent un grand nombre de propriétés particulières (cf annexe).

La fonction tangente, définie comme étant le rapport de sinus et de cosinus, a une période quant à elle de π.



Représentation des fonction sinus et cosinus.

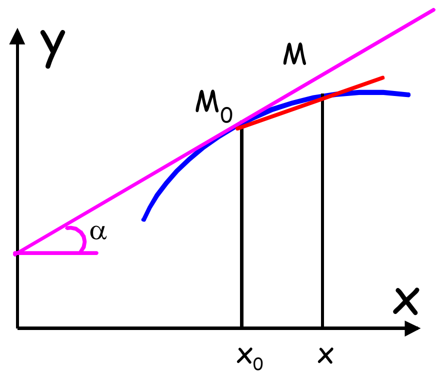
DERIVEES

<u>Définitions</u>

Soit y=f(x) une fonction à variable réelle de la variable réelle x; f(x) sera dite dérivable en x_0 si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers zéro lorsque x tend vers x_0.

Cette valeur limite est notée f '(x_0). Elle constitue la dérivée de f(x) en x_0. L'extension de cette notion à f(x) conduit à définir la fonction dérivée f '(x).

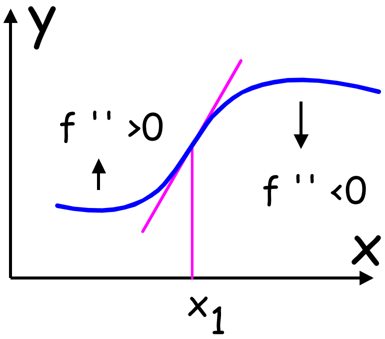
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ s'interprète géométriquement comme la pente de la droite des points M(x, y) et $M_0(x_0, y_0)$. Lorsque l'on fait tendre x vers x_0, ce rapport devient la pente de la tangente au graphe de la fonction : f '(x)=tg(α).



Interprétation géométrique de la dérivée.

Le signe de la dérivée indique la croissance (f '(x)>0) ou la décroissance (f '(x)<0) de la fonction f. L'annulation de cette dérivée pour une valeur x_1 indique un extremum (minimum ou maximum).

Cette nouvelle fonction f '(x), appelée dérivée première peut à nouveau être dérivée pour donner la dérivée seconde f ''(x). Son signe définie la concavité de la fonction f(x), son annulation indique la présence d'un point d'inflexion, c'est à dire un changement de concavité. Graphiquement ceci se traduit par une courbe traversant sa tangente en ce point.



Représentation graphique de la dérivée seconde, du point d'inflexion et de la concavité.

Propriétés

- La dérivation est une opération linéaire : { Af(x)+Bg(x)} '=Af '(x)+Bg '(x).
- La dérivation d'un produit : f(x).g(x) est de la forme f '(x)g(x) + f(x)g '(x).
- La dérivation d'un rapport : $\frac{f}{g}$ est de la forme $\frac{f'g-fg'}{g^2}$.
- La dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des deux fonctions:
  H '(x)={g[f(x)]} '= g '[f(x)].f '(x).
- La dérivée de ln(x) est égale à $\frac{1}{x}$.
- La dérivée de e^x est égale à e^x.
- La dérivée de sin(x) et cos(x) sont respectivement cos(x) et -sin(x).
- La combinaison de ces propriétés conduit à plusieurs autres qui seront développées sous forme d'exercices.

SERIES

Le développement d'une fonction en série joue un rôle considérable tant pour les calculs analytiques que l'évaluation numérique.

Formule de taylor

Pour une fonction continûment dérivable en $x=x_0$, on a :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+h^n\varepsilon(h).$$

Dans cette relation appelée formule de TAYLOR,

n! est appelé factorielle de n, c'est à dire égal au produit des n premiers entiers; n!=1.2.3.4.......n, avec 0!=1

ε(h) est une quantité qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Applications et propriétés

Plusieurs fonctions seront développées dans le cadre d'exercices, citons ici à titre d'exemple la fonction e^x :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

L'application de la formule de Taylor n'est pas le seul mode d'obtention des développements en série. On peut en effet manipuler les développements comme des polynômes et donc en faire des produits, des élévations à des puissances différentes,...

Différentielles

Dans l'expression générale du développement en série de Taylor, un rôle particulier est joué par celui qui n'est poussé qu'au premier ordre (n=1).

On a ainsi $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$.

Que l'on peut encore écrire $f(x_0+h) - f(x_0) = hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$.

Pour h tendant vers 0, c'est à dire pour un accroissement de x_0 infiniment petit noté dx_0, l'expression précédente devient :

$f(x_0+dx_0) - f(x_0) = dx_0 f'(x_0)+dx_0\varepsilon(dx_0)$.

Le produit $dx_0\varepsilon(dx_0)$ étant un infiment petit d'ordre supérieur à $dx_0 f'(x_0)$ l'approximation ainsi effectuée conduit à :

$f(x_0+dx_0) - f(x_0) = dx_0 f'(x_0)$.

Cette expression étant valable $\forall\ x_0$, elle peut donc être écrite pour $x=x_0$. D'autre part, le terme à gauche de cette équation représente l'accroissement de la fonction f en x_0 et sera noté df.

On obtient donc $df=f'(x).dx$ ou encore $\frac{df}{dx}=f'(x)$, notation couramment utilisée.

EXERCICES D'APPLICATION

1. Calculer pour $y=ax+b$; $y=ax^2+bx+c$:

   $\frac{dy}{dx}$;

   $\frac{dy}{da}$;

   $\frac{dy}{db}$;

2. De même pour $y=\ln(ax+b)$; $y=\ln(ax^2+bx+c)$.

3. De même pour $y=e^{ax+b}$; $y=e^{ax2+bx+c}$.

4. De même pour $y=\cos(ax+b)$; $y=\cos(ax^2+bx+c)$.

5. De même pour $y=\sin(ax+b)$; $y=\sin(ax^2+bx+c)$.

6. De même pour $y=tg(ax+b)$; $y=tg(ax^2+bx+c)$.

7. Démontrer que $\{f(x)^n\}'=n\{f(x)\}^{n-1}\,f'(x)$.

8. Effectuer le développement en série de : sin(x).

9. Effectuer le développement en série de : cos(x).

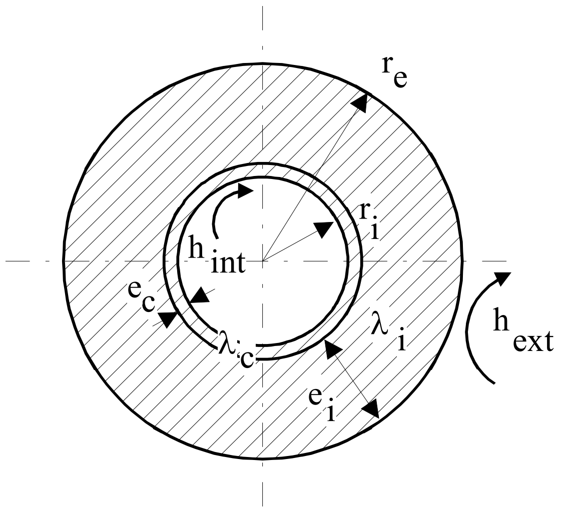
10. Effectuer le développement en série de : ln(1+x).

11. Effectuer le développement en série de : tg(x).

12 Trouver pour chacun de ces cas (1-11) s'il existe des extremum ou des points d'inflexion.

13 Sachant que l'eau bout à 20°C sous une pression de 2.339 kPa et que la relation caractérisant un équilibre monovariant est de la forme $Ln(p)= -\frac{\Delta H}{RT}+\frac{\Delta S}{R}$ (Equation de Oldham-Clapeyron), calculer l'enthalpie molaire et massique de changement de phase (vaporisation) de l'eau.

14



De l'eau chaude sanitaire à une température T_h circule dans un tube en cuivre d'épaisseur e_c et de conductivité thermique λ_c avec un coefficient d'échange h_{int}. Ce tuyau traverse la cloison d'un garage pour alimenter un radiateur situé à l'intérieur d'une habitation. La température de l'air dans ce garage est T_a et l'absence de courant d'air assure un coefficient d'échange convectif laminaire h_{ext}. Naturellement, le propriétaire cherchant à minimiser les pertes thermiques isole ce tuyau avec un produit commercial de conductivité thermique λ_i.

Montrer qu'il doit nécessairement mettre une épaisseur suffisante pour ne pas accroître ces pertes et tracer l'allure du flux thermique en fonction de cette épaisseur.

15 Trouver les dérivées des fonctions suivantes :

$$\cos^3 x - 3\cos x \qquad \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 3x + 2} \qquad x^3(x^2 - 1)^2$$

$$x^4(x^2 + 1)^3(x - 1)^2 \qquad x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\sin^m(ax + b) \qquad \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

16 Montrer que la dérivée d'une fonction paire (ou impaire) est impaire (ou paire). Vérifier sur les exemples précédents.

17 On pose

$y = (x + \sqrt{1 + x^2})^2$. Calculer y' et y''. Montrer que $(1 + x^2)y'' + xy' - 4y = 0$

18 Dérivées successives des fonctions suivantes

$$\cos^2 x \qquad \sin^2 x \qquad \cos mx \qquad \frac{1}{1-x} \qquad \frac{1}{1+x} \qquad \frac{1}{1-x^2}$$

19 On considère les fonctions y de la variable x définies par les équations paramétriques

$$(1)\ \begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x = \dfrac{t-1}{t+1} \\ y = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$$

Calculer pour chacune d'elles y'_x, y''_x, y'''_x.

INTEGRATION

PRIMITIVE D'UNE FONCTION

Soit f(x) une fonction, on appelle primitive de f toute fonction F(x) qui admet f(x) pour dérivée : $F'(x)=\frac{dF}{dx}=f(x)$.

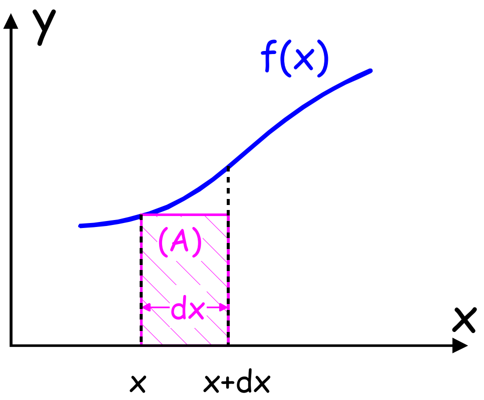
Si F(x) satisfait à l'équation précédente, il en est de même pour la fonction G(x)= F(x)+A où A est une constante.

Il existe donc une infinité de primitives de fonctions qui ont même dérivée.

A titre d'exemple, une liste de primitives peut être dressée à partir de la liste de dérivées présentée dans la première partie.

SIGNIFICATION GEOMETRIQUE

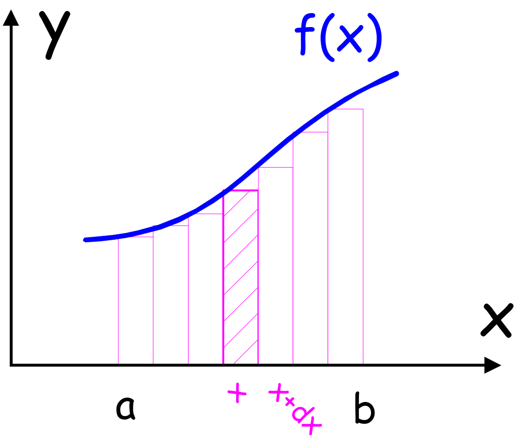
Dans le plan P (O, x, y), la différentielle dF=f.dx est représentée par la surface du rectangle (A) dont les cotés sont f(x) et dx. Si on fixe la largeur du segment dx, on voit bien que l'aire considérée dépend de la position de l'origine de ce segment sur l'axe Ox. Il est donc nécessaire de définir deux valeurs : l'origine et la largeur du segment dx pour caractériser l'aire considérée. Par commodité, on défini deux bornes (dites d'intégration) correspondant aux valeurs extrêmes de x du rectangle : x et x+dx.



L'aire (A) fournit la valeur de la différentielle dS de S(x) et on a donc dS=f(x).dx et $\frac{dS}{dx}=f(x)$.

Ses considérations s'étendent à l'évaluation des volumes selon une démarche similaire en passant d'un espace de deux à trois dimensions : dV=S(z).dz et $\frac{dV}{dz}=S(z)$.

INTEGRALE DE FONCTION



Revenons au calcul de l'aire dans le plan mais en cherchant sa valeur, c'est à dire limitée par la courbe donnée par f(x), l'axe (0, X) et les deux droites x=a et x=b.

La valeur de la surface considérée est égale à la somme des surfaces élémentaires de la figure dont les bases ont pour valeur dx. On voit bien qu'une erreur est commise pour chacune des approximations où on considère que f(x) est constante sur l'intervalle [x, x+dx].

Ainsi, la totalité de la surface est donnée par :

$$A = \sum_{x=a \to x=b} f(x).dx$$

L'erreur introduite dans ce calcul est diminuée si la valeur de dx l'est aussi. Ainsi, une discrétisation plus fine de l'espace conduit à une approximation toujours plus 'juste'. Cette notion, plus physique que mathématique, peut être poussée à son extrême pour atteindre des valeurs infinitésimales de dx. Dès lors, la somme précédemment définie tend vers une limite (correspondante à la surface exacte considérée) qui s'écrit :

$$A = \int_a^b f(x).dx$$

où

- le signe $\int$ est appelé signe somme ou signe intégrale
- a et b constituent les bornes d'intégration
- f(x) est appelé intégrande
- dx l'élément différentiel

On peut admettre que la fonction à intégrer soit négative, comme c'est le cas par exemple pour $\int_\pi^{2\pi} \sin\theta d\theta$.

A partir de l'expression de l'intégrale précédente, on obtient une valeur réelle fonction des deux bornes (a et b) prises en compte dans le calcul. Une telle intégrale est appelée **intégrale définie**.

En revanche, si on suppose que la borne b est inconnue à priori, et qu'on lui donne la valeur x>a, l'expression $\int_a^x f(x).dx = F(x) - F(a)$, encore notée $[F]_a^x$ où F est une primitive quelconque de f(x), c'est à dire définie à une constante près, on parle alors **d'intégrale indéfinie** que l'on notera désormais $\int f(x)dx$.

PROPRIETES ET TECHNIQUES D'INTEGRATION

- L'intégration est une opération linéaire :
- $\int [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx$.
- D'après la formule de dérivation que nous avons vu : d(uv)=udv+vdu, il vient $\int udv = [uv] - \int vdu$.

  Cette méthode est appelée intégration par parties.
- Si la fonction f(x) est paire, c'est à dire que f(-x)=f(x) alors $\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- Si la fonction f(x) est impaire, c'est à dire que f(-x)=-f(x) alors $\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 0$.

EXERCICES D'APPLICATION

1 Calculer l'intégrale indéfinie de : $A\cos(\omega t)$ et $A\sin(\omega t)$

2 Donner la valeur de l'intégration de $\sin(t)$, $\cos(t)$ et $tg(t)$ pour les bornes suivantes :
$[0, \pi]$; $[0, \pi/2]$; $[0, \pi/4]$; $[-\pi, \pi]$; $[-\pi/2, \pi/2]$; $[-\pi/4, \pi/4]$;

3 Calculer l'intégrale indéfinie de : $\frac{1}{\alpha x}$.

4 Calculer l'intégrale indéfinie de : $e^{-\alpha x}$.

5 Calculer l'intégrale indéfinie de : $x^{1/\alpha}$.

6 Calculer la surface d'un disque en considérant l'angle $d\theta$ comme élément différentiel.

7 Calculer la surface d'un disque en considérant le rayon dr comme élément différentiel.

8 Calculer l'intégrale indéfinie de : $\ln(x)$.

9 Calculer l'intégrale indéfinie de : $x\ln(x)$.

10 Calculer l'intégrale indéfinie de : $x^n\ln(x)$.

11 Calculer l'intégrale indéfinie de : $\cos^2\theta$.

12 Calculer l'intégrale indéfinie de : $\sin^2\theta$.

13 Calculer l'intégrale indéfinie de : $\sin\theta\cos\theta$.

14 Calculer le travail mis en jeu lors de la transformation isotherme d'un gaz parfait.

15 Calculer le travail mis en jeu lors de la transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait.

16 Calculer le travail mis en jeu lors de la transformation isochore d'un gaz parfait.

17 Calculer le travail mis en jeu lors de la transformation isobare d'un gaz parfait.

18 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int x^2 e^x dx \qquad \int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx \qquad \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} \qquad \int x\sin x dx \qquad \int x \operatorname{ch} x dx$$

$$\int \ln x dx \qquad \int x^2 \cos x dx \qquad \int x\ln x dx \qquad \int x a^x dx$$

19 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{\cos x} \qquad \int \frac{dx}{1+\cos x} \qquad \int \cos^3 x dx \qquad \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} \qquad \int \sin^4 x dx$$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx \qquad \int tg^2 x dx$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

INTRODUCTION

Une équation différentielle est une relation entre une fonction f(x) dont l'expression est initialement inconnue et un certain nombre de ses dérivées. L'ordre de l'ED est donné par l'ordre le plus élevé des dérivées intervenant dans cette relation.

L'objectif lié à la définition de l'équation différentielle est la détermination de la fonction inconnue f(x). Faisant appel au calcul intégral, il est clair que l'expression de la fonction solution sera en fait définie à une constante additive près, qui sera connue grâce aux conditions aux limites qui accompagnent systématiquement tout problème physique.

Les méthodes de résolution sont de deux types: analytiques et numériques. La première catégorie suppose que le problème posé satisfasse à plusieurs conditions afin que puisse lui être appliqué différentes 'recettes' permettant sa résolution. Dès que le problème se situe en dehors de ces cas particuliers, l'outil qui est le plus à même d'accéder à la solution repose sur des méthodes numériques de résolution. Ces dernières tendent à se généraliser car il est clair que les équations différentielles deviennent de plus en plus complexes à mesure que les hypothèses permettant de les écrire prennent en compte la réalité physique du phénomène. Ainsi, les solutions relatives aux ED bien connues en physique (transfert de masse, de chaleur,...) ne sont valables que pour des 'cas école', c'est à dire posées avec des hypothèses simplificatrices. Le cas particulier des équations différentielles non linéaires fait largement appel aux résolutions numériques. Ces méthodes ne seront pas développées ici, en revanche la façon de définir l'ED qui précède sa résolution y sera abordée.

Dans le cas d'ED simples, la rapidité avec laquelle elles peuvent être résolues analytiquement rend l'emploi de méthodes numériques souvent plus lourdes. Les différents travaux qui ont précédé le développement de l'outil informatique ont permis néanmoins la résolution de nombre de ces problèmes physiques simples et les méthodes ont été classées d'après la forme globale de l'équation différentielle.

EQUATIONS LINEAIRES DU PREMIER ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS.

L'expression générale de ce type d'ED est de la forme :

$$\frac{df(x)}{dx} + \lambda f(x) = g(x).$$

Equations sans second membre

Il s'agit en fait d'un cas particulier de la précédente expression où g(x)=0.

L'ED s'écrit donc $\frac{df(x)}{dx} + \lambda f(x) = 0$, soit encore $\frac{f'}{f} = -\lambda$.

La résolution en est alors évidente, puisque l'on reconnaît la dérivée logarithmique $\frac{d\,Ln\,f(x)}{dx}$.

Ainsi, $dLn(f)=-\lambda dx$ donne, une fois intégré, $Ln(f)=a-\lambda x$ où a est une constante d'intégration.

Le calcul de f donne alors $\mathbf{f(x)=Ce^{-\lambda x}}$ où $C=e^a$.

En physique les conditions aux limites permettent de lever l'indétermination de a (ou C) pour obtenir une seule expression de f(x) correspondant au problème envisagé. Supposons que soit connue la valeur $f(x_0)$, la solution unique est alors :

$f(x)=f(x_0)e^{-\lambda(x-x0)}$.

Equations avec second membre

La méthode généralement utilisée pour résoudre les équations différentielles de la forme $\frac{df(x)}{dx} + \lambda f(x) = g(x)$ est appelée à variation de la constante.

Elle consiste à s'inspirer le la précédente méthode mais en remplaçant la constante C par une fonction C(x).

Ainsi, posons $f(x)=C(x)e^{-\lambda x}$ qui donne après dérivation $f'=C'(x)\, e^{-\lambda x}-\lambda\, C(x)\, e^{-\lambda x}$.

En reportant ces deux expression dans l'ED, on obtient $C'(x)\, e^{-\lambda x}=g(x)$, soit $C(x)=\int g(x)e^{\lambda x}dx$.

EQUATIONS LINEAIRES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS.

Equations sans second membre

La forme générale de ces ED est : $\frac{d^2y}{dx^2}+2f\frac{d\ y}{dx}+\varepsilon\omega_0^2 y=0$ ($\varepsilon=\pm1$).

Le cas $f=0=\omega_0^2$, conduit à $y=ax+b$.

Le cas $f=0$ conduit à :

$y=Ae^{\omega 0x}+Be^{-\omega 0x}$ pour $\varepsilon=-1$

$y=A\cos(\omega_0 x)+B\sin(\omega_0 x)$ pour $\varepsilon=+1$.

On sent bien à travers ces cas particuliers que les solutions de l'équation générale sont de type exponentielle $y=Ae^{rx}$.

Cette fonction, une fois dérivée (jusqu'à l'ordre 2), est introduite dans l'expression de l'ED et conduit à $r^2+2fr+\varepsilon\,\omega_0^2=0$.

Il existe alors deux solutions pour r :

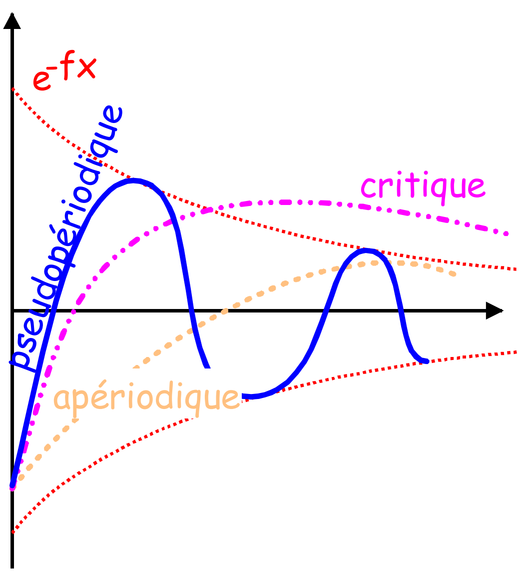
$r_1=-f+\sqrt{f^2-\varepsilon\omega_0^2}$

$r_2=-f-\sqrt{f^2-\varepsilon\omega_0^2}$

auquelles correspondent deux fonctions solution qui sont combinées linéairement pour donner l'expression générale de y : $y=A_1e^{r1x}+A_2e^{r2x}$

où A_1 et A_2 sont deux constantes dont la détermination provient des conditions aux limites données par le problème physique considéré.

Bien évidement l'allure générale des solutions dépend des valeurs prises par les différents paramètres f, ε, ω_0^2.



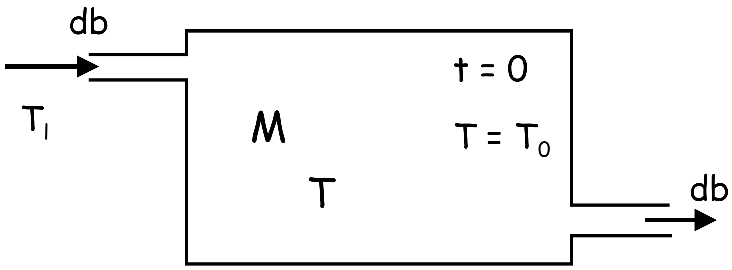
Pour $\varepsilon=-1$ ou avec $\varepsilon=+1$ et $|f|>|\omega_0^2|$ les deux racines r_1 et r_2 sont réelles et la solution ne présente pas de difficultés. Le signal correspondant est dit en régime *apériodique*.

Pour $\varepsilon=+1$ et $|f|<|\omega_0^2|$ les deux racines deviennent complexes et la solution s'écrit : $y=e^{-fx}(A_1\cos\Omega x+A_2\sin\Omega x)$ avec $\Omega^2=\omega_0^2-f^2$, le régime est dit *pseudo périodique*.

Pour $\varepsilon=+1$ et $|f|=|\omega_0^2|$ les deux racines deviennent égales et la solution s'écrit : $y=e^{-fx}\,(Ax+B)$ le régime est dit *critique*.

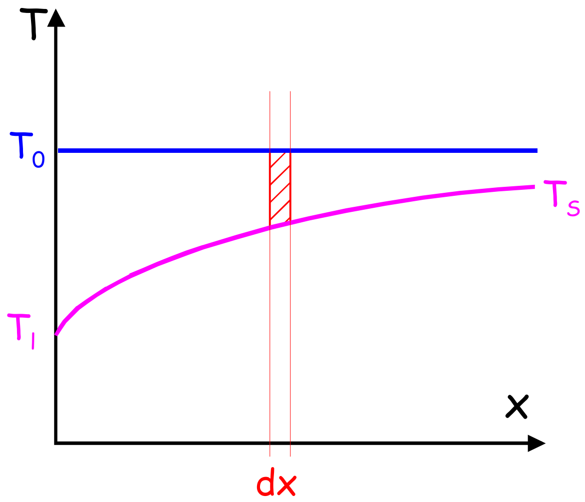
EXERCICES D'APPLICATION

1)



Un réservoir d'eau de masse M initialement à T_0 est alimenté à t>0 par un débit db d'eau à T_1. Poser l'ED relative à l'évolution de la température de sortie du réservoir au cours du temps et la solutionner.

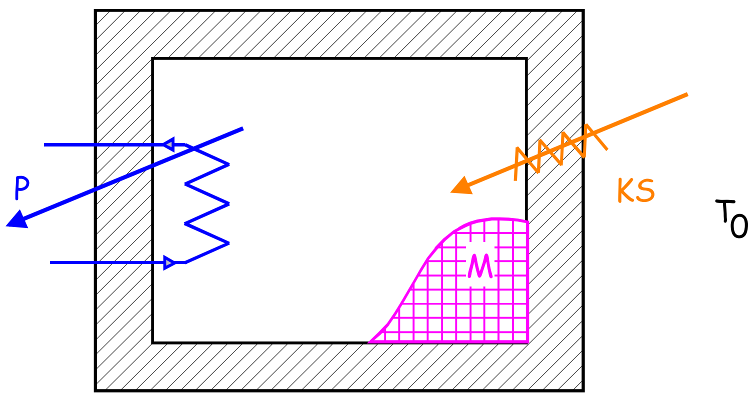
2)



Un échangeur est maintenu à la paroi à une température T_0. Un fluide entrant à T_1 circule à l'intérieur pour en sortir à T_s. Le régime permanent est établi. Trouver la répartition de température du fluide le long de l'échangeur.

Débit massique (kg/s) : db
Coefficient d'échange paroi/fluide (W/m^2.K) : α
Capacité calorifique (J/kg.K) : Cp
Surface linéique (m^2/m) : σ

3)



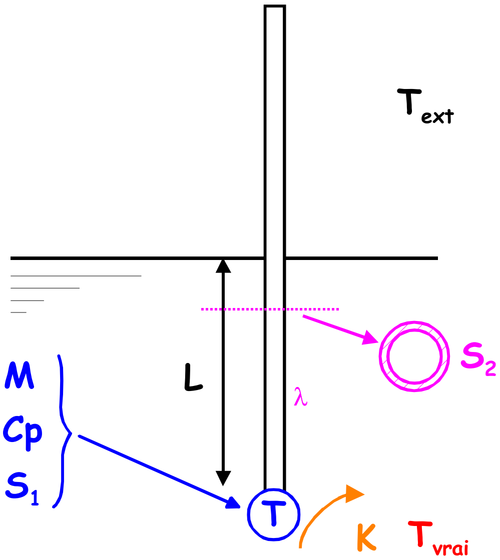
Une masse M de denrée à température ambiante est disposée dans un camion frigorifique lui aussi à température ambiante. A t>0, une puissance constante P de froid est produite dans le camion. Donner l'expression littérale de la température limite atteinte, sachant que l'échange entre les denrées et l'extérieur est caractérisé par un terme KS global (W/°C).

4) Considérons un échangeur parcouru par deux fluides séparés par une paroi. Les deux fluides échangent de la chaleur entre eux avec un coefficient d'échange global Hg. Trouver l'expression du flux transmis dans le cas d'un échangeur à contre-courant et co-courant.

5) L'exploitant d'une unité de climatisation dans des locaux tertiaires tente de minimiser le coût de fonctionnement de celle ci. La puissance installée est de P et la température extérieure durant la nuit atteint T_0. A quelle heure de la nuit doit il mettre en route le système de climatisation pour assurer, à l'heure d'ouverture des bureaux, une température de T_1. A quelle heure peut-il la couper tout en assurant un confort acceptable à ses occupants.

6) Une usine agroalimentaire dispose d'un système de stockage à eau glacée pour assurer les besoins en froid de son procédé de transformation. Ses affaires prospèrent et il décide d'augmenter sa production journalière par un facteur $\varepsilon > 1$.
La puissance installée dont il dispose est-elle suffisante pour ce nouveau cahier des charges ou bien doit-il investir dans un système supplémentaire de production de froid.

7)



On veut mesurer une température (appelée T_{vrai}) dans un liquide au moyen d'un thermocouple. L'élément sensible en extrémité de thermocouple est de masse M, de capacité calorifique Cp et sa surface de contact avec le liquide est S_1. L'échange thermique convectif qui s'établit entre le thermocouple et le fluide est caractérisé par un coefficient d'échange K. Le thermocouple est inséré dans un doigt de gant dont l'autre extrémité baigne dans une ambiance à la température T_{ext}. Considérons que toute la partie extérieure du doigt est à cette température et qu'il y a conduction de chaleur au travers du tube de section S_2, de conductivité λ sur la longueur L.

Déterminez en fonction de ces paramètres, l'expression de la température T « mesurée » par le thermocouple

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Les fonctions de plusieurs variables sont classiques en physique et traduisent la complexité du phénomène pris en compte. A titre d'exemple, dans la zone liquide/vapeur d'un corps pur, la pression et la température sont reliées par la relation de Clapeyron T= f(P) (cf chapitre 1) alors qu'il est nécessaire d'avoir un autre variable X (enthalpie, entropie,...) pour caractériser l'état dans lequel on se trouve : P=f(T, X) dans la zone liquide ou vapeur.

De façon générale, les fonctions de plusieurs variables seront notées : $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
qui dans le cas d'une fonction de deux variables prendra la forme : $z=f(x, y)$.

DERIVEES PARTIELLES

Les dérivées de ces fonctions sont appelées dérivées partielles de la fonction $z=f(x, y)$ et sont obtenues en considérant les autres variables constantes :

$$f_x' = \frac{\partial f}{\partial x};$$

$$f_y' = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Le signe ∂ traduit le fait que la fonction f est à plusieurs variables par opposition aux précédents chapitres où ce signe était noté d.

D'après les propriétés générales des fonctions d'une variables, on peut faire intervenir les différentielles :

$$y \text{ étant constant } df\ (=dz) = \frac{\partial f}{\partial x} dx;$$

$$x \text{ étant constant } df\ (=dz) = \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

La généralisation de la dérivée seconde et des suivantes amène :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ pour } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ pour } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ pour } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ pour } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

La différentielle d'une fonction de deux variables s'écrit $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Propriétés des dérivées secondes croisées.

Si f est deux fois dérivables avec des dérivées continues des deux premiers ordres, alors on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Supposons qu'il existe deux fonctions F et G qui satisfont $\frac{\partial f}{\partial x} = F$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = G$.

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que la précédente égalité soit vérifiée est que :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

DIFFERENTIELLES ET INTEGRALES

Différentielles exactes

Nous avons déjà vu qu'à z=f(x, y) peut être associé sa différentielle :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$dZ=F(x, y)dx+G(x, y)dy.$$

La forme linéaire dZ constitue une **forme différentielle**, c'est à dire que contrairement à la différentielle dz=df, dZ n'est pas donnée comme différentielle d'une fonction f(x, y) mais comme la combinaison linéaire associée à deux fonctions F et G.

Cependant si il s'avère que dans certains cas on a $\frac{\partial f}{\partial x}$=F et $\frac{\partial f}{\partial y}$=G alors on parle de **différentielle exacte**.

Intégrales

Entre deux plans, est pris un élément de volume dV égal au produit de l'épaisseur dy de la tranche (espace entre plan) par l'aire du plan de cette tranche S(y).

On a alors : dV=S(y).dy.

V est alors obtenu par l'intégrale simple V= $\int_{y1}^{y2} S(y).dy$

Or S(y) est simplement l'aire comprise entre l'axe parallèle à l'axe des x et la courbe représentative f(x,y)

On a donc : S(y)= $\int_{x1(y)1}^{x2(y)} f(x,y).dx$

et finalement : V= $\int_{y1}^{y2} dy \int_{x1(y)}^{x2(y)} f(x,y)dx$ que l'on écrira plus commodément :

V= $\iint_\Gamma f(x,y)\ dx\ dy$ où Γ représente le domaine d'intégration.

EXERCICES D'APPLICATION

1 Calculer les dérivées premières et la différentielle de :

$$V(\rho,\theta)=V_1\frac{\cos\theta}{\rho^2}.$$

Calculer les dérivées secondes.

2 Mêmes questions pour :

$$\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

3 Calculer toutes les dérivées partielles premières de l'équation des gaz parfaits.

4 Calculer toutes les dérivées partielles secondes de l'équation des gaz parfaits.

5 Calculer toutes les dérivées partielles premières de l'équation de Van der Waals :

$$(P+\frac{a}{V^2})(V-b)=RT\ .$$

6 Calculer toutes les dérivées partielles secondes de l'équation de Van der Waals.

7 Calculer les relations de Maxwell pour un système fermé.

8 Un industriel du domaine agroalimentaire désire vendre les boites de conserves de cassoulet. Il cherche à proposer un produit différent de ses concurrents par une forme nouvelle de boite. Cependant, il est soucieux de minimiser ses coûts de matière première et souhaite avoir un contenant du plus grand volume tout en ayant une surface minimale. Trouvez la relation liant le rayon et la longueur pour satisfaire son besoin d'économies.

9 Calculer la surface d'un disque par intégrale double.

10 Calculer le volume d'une sphère par intégrale simple.

11 Calculer le volume d'une sphère par intégrale double.

12 Calculer le volume d'une sphère par intégrale triple.

13 Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes:

$$z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad\qquad z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

Vérifiez que $z''_{xy}=z''_{yx}$

14 On pose $z=f(u)$, avec $u=xy$. Etablir les résultats suivants :

$$z'_x=yf'(u) \qquad z'_y=xf'(u) \qquad z''_x=y^2f''(u) \qquad z''_y=x^2f''(u) \qquad z''_{xy}=z''_{yx}=f'(u)+uf''(u)$$

ANNEXES

Une copie informatique du document est téléchargeable sur http://jc.castaing.free.fr/, ainsi que les solutions des exercices.

ANNEXE 1 : OUTILS ET OPERATEURS MATHEMATIQUES

NOTATIONS

s : scalaire (tenseur d'ordre 0)

$\mathbf{v}$: vecteur (tenseur d'ordre 1)

$\overline{\overline{t}}$: matrice (tenseur d'ordre 2)

Coordonnées cartésiennes et cylindriques

	cartésiennes (x,y,z)	cylindriques (r , θ, z)
v	$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix}$
$\overline{\overline{t}}$	$\begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_{rr} & t_{r\theta} & t_{rz} \\ t_{\theta r} & t_{\theta\theta} & t_{\theta z} \\ t_{zr} & t_{z\theta} & t_{zz} \end{pmatrix}$

OPERATEURS DIFFERENTIELS

gradient

	cartésiennes (x,y,z)	cylindriques (r , θ, z)
grads ou ∇s ou $\frac{\partial s}{\partial x_i}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial \theta} \\ \frac{\partial s}{\partial z} \end{pmatrix}$
$\overline{\overline{\mathrm{grad}v}}$ ou $\overline{\overline{\nabla v}}$ ou $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$

divergence.

	cartésiennes (x,y,z)	cylindriques (r , θ, z)
div(**v**) ou $\nabla \cdot v$ ou $\frac{\partial v_k}{\partial x_k}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$
$\mathbf{div}(\overline{\overline{t}})$ ou $\nabla \cdot \overline{\overline{t}}$ ou $\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial t_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial t_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial t_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial(rt_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial t_{rz}}{\partial z} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial(rt_{\theta r})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial t_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial(rt_{zr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{z\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$

Laplacien

	cartésiennes (x,y,z)	cylindriques (r , θ, z)
Δs ou $\nabla^2 s$ ou $\frac{\partial^2 s}{\partial x_k \partial x_k}$	$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial s}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$
$\Delta \mathbf{v}$ ou $\nabla^2 v$ ou $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$

QUELQUES REFERENCES D'OUVRAGES

- **COURS DE MATHEMATIQUES** pour la préparation aux brevets de techniciens supérieurs et pour les écoles d'ingénieur. J. MARTIN, éditions DUNOD
- **MATHEMATIQUES DE L'INGENIEUR** aide mémoire. M. CHOSSAT, éditions DUNOD
- **FORMULAURE TECHNIQUE**, éditions GIECK

ANNEXE 2 : FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Transformation de produits en sommes :

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

Transformation de sommes en produits

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} . \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} . \sin \frac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} . \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} . \sin \frac{p-q}{2}$

Dérivées

$(\sin u)' = u'. \cos u$

$(\cos u)' = -u'. \sin u$

Identités remarquables

$1+tg^2a = \frac{1}{\cos^2 a}$ $1+cotg^2a = \frac{1}{\sin^2 a}$ ^{2} $\sin^2a+\cos^2a=1$

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$tg(-x) = -tg\, x$	$cotg(-x) = -cotg\, x$
$\cos(\pi-x) = -\cos x$	$\sin(\pi-x) = \sin x$	$tg(\pi-x) = -tg\, x$	$cotg(\pi-x) = -cotg\, x$
$\cos(\pi+x) = -\cos x$	$\sin(\pi+x) = -\sin x$	$tg(\pi+x) = tg\, x$	$cotg(\pi+x) = cotg\, x$
$\cos(\pi/2-x) = \sin x$	$\sin(\pi/2-x) = \cos x$	$tg(\pi/2-x) = cotg\, x$	$cotg(\pi/2-x) = tg\, x$
$\cos(\pi/2+x) = -\sin x$	$\sin(\pi/2+x) = \cos x$	$tg(\pi/2+x) = -cotg\, x$	$cotg(\pi/2+x) = -tg\, x$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\cos 2a = \cos^2a - \sin^2a = 2\cos^2a - 1 = 1 - 2\sin^2a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$tg\, 2a = \frac{2\, tg\, a}{1 - tg^2a}$