Cnam

CONSERVATOIRE NATIONAL
DES ARTS ET METIERS

IFFI

INSTITUT
FRANÇAIS DU
FROID
INDUSTRIEL

RAPPELS

DE

MATH

(SOLUTIONS)

Jean CASTAING-LASVIGNOTTES
Septembre 2001

Une copie informatique du document est téléchargeable sur http://jc.castaing.free.fr/.

FONCTION, SERIES ET DERIVEES.

1.

$\frac{dy}{dx} = a$; $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$;

$\frac{dy}{da} = x$; $\frac{dy}{da} = x^2$;

$\frac{dy}{db} = 1$; $\frac{dy}{db} = x^2$;

2.

$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$;

$\frac{dy}{da} = \frac{x}{ax+b}$; $\frac{dy}{da} = \frac{x^2}{ax^2+bx+c}$;

$\frac{dy}{db} = \frac{1}{ax+b}$; $\frac{dy}{db} = \frac{x}{ax^2+bx+c}$;

3.

$\frac{dy}{dx} = ae^{ax+b}$; $\frac{dy}{dx} = (2ax+b)e^{ax^2+bx+c}$;

$\frac{dy}{da} = xe^{ax+b}$; $\frac{dy}{da} = x^2 e^{ax^2+bx+c}$;

$\frac{dy}{db} = e^{ax+b}$; $\frac{dy}{db} = xe^{ax^2+bx+c}$;

4.

$\frac{dy}{dx} = -a\sin(ax+b)$; $\frac{dy}{dx} = -(2ax+b)\sin(ax^2+bx+c)$;

$\frac{dy}{da} = -x\sin(ax+b)$; $\frac{dy}{da} = -x^2\sin(ax^2+bx+c)$;

$\frac{dy}{db} = -\sin(ax+b)$; $\frac{dy}{db} = -x\sin(ax^2+bx+c)$;

5.

$\frac{dy}{dx} = a\cos(ax+b)$; $\frac{dy}{dx} = (2ax+b)\cos(ax^2+bx+c)$;

$\frac{dy}{da} = x\cos(ax+b)$; $\frac{dy}{da} = x^2\cos(ax^2+bx+c)$;

$\frac{dy}{db} = \cos(ax+b)$; $\frac{dy}{db} = x\cos(ax^2+bx+c)$;

6.

$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax+b}{\cos^2(ax^2+bx+c)}$;

$\frac{dy}{da} = \frac{x}{\cos^2(ax+b)}$; $\frac{dy}{da} = \frac{x^2}{\cos^2(ax^2+bx+c)}$;

$\frac{dy}{db} = \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$; $\frac{dy}{db} = \frac{x}{\cos^2(ax^2+bx+c)}$;

7.

Sachant que (g.h)'=f '.g+f.g ' on a :

$\{f^2(x)\}'=\{f.f\}'=f '.f+f.f '=2f.f '$

$\{f^3(x)\}'=\{f.f^2\}'=f '.f^2+f.(f^2)'=f '.f^2+f.(2f.f ')=3f '.f^2$

.

.

$\{f^n(x)\}'=nf '.f^{n-1}$

8.

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

9.

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

10.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

11.

$$tg(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots$$

12

	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion	extrémum à x=-b/2a; pas de point d'inflexion
1	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion
	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion
	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion	extrémum à x=-b/2a; 2 points d'inflexion lorsque $6a^2x^2+6abx+2ac+b^2=0$
2	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion
	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion
	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion	extrémum à x=-b/2a; 2 points d'inflexion lorsque $4a^2x^2+4abx+2a+b^2=0$
3	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion
	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion	pas d'extrémum; pas de point d'inflexion
	extremum à x=-b/a; point d'inflexion à x=(π/2-b)/a	extremum à x=-b/2a et pour $ax^2+bx+c=0$
4	extremum à a=-b/x; point d'inflexion à a=(π/2-b)/x	extremum pour $ax^2+bx+c=0$
	extremum à b=-ax; point d'inflexion à b=π/2-ax	extremum pour $b=-(ax^2+c)/x$

13

L'équation de Oldham-Clapeyron, $\mathrm{Ln}(P)=-\frac{\Delta H}{RT}+\frac{\Delta S}{R}$ est représenté par une droite dans le diagramme {-1/T, ln(P)}. La pente de la tangente (ΔH/R) est donc égale à $\frac{\Delta[\ln(P)]}{\Delta[\frac{1}{T}]}$ que l'on calcule grâce aux deux points :

{ln(2.339 10^3), -1/(293)} et {ln(1 10^5), -1/(373)}
avec R=8.314 J/mol.K.
d'où, ΔH= 42654 J/mol =2.37 MJ/kg.

14

L'expression du flux, traversant le tube et son isolant, est de la forme $\phi=(KS)_g.\Delta T$, avec

$$\frac{1}{(KS)_g}=\frac{1}{h_{int}\,2\pi r_i L}+\frac{\ln\frac{r_i+e_c}{r_i}}{2\pi\lambda_c L}+\frac{\ln\frac{r_e}{r_i+e_c}}{2\pi\lambda_i L}+\frac{1}{h_{ext}\,2\pi r_e L}$$, résistance thermique équivalente.

Le flux est donc une fonction du rayon extérieur d'isolant re. Ce flux passe par un maximum lorsque le dénominateur ($1/KS_g$) passe par un minimum (sa dérivée s'annule).

Ainsi, $\left\{\frac{1}{(KS)_g}\right\}'=0+0+\frac{1}{2\pi\lambda_i L}*\frac{1}{r_e}-\frac{1}{h_{ext}\,2\pi r_e^2 L}=0$ pour $re=\lambda_i/h_{ext}$

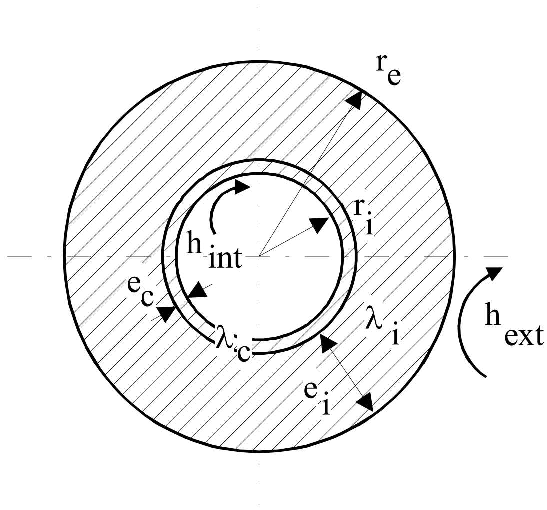
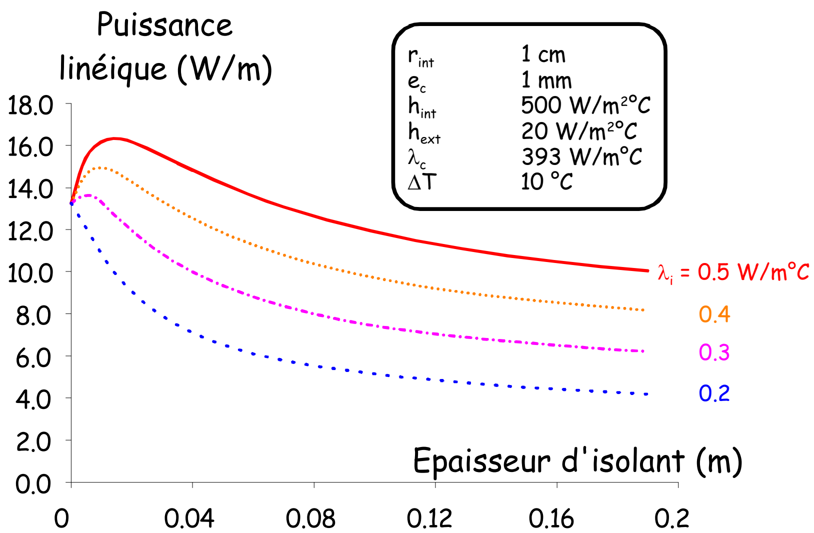


Schéma du dispositif

Le propriétaire cherchant à minimiser les pertes thermiques doit isoler ce tuyau avec une épaisseur suffisante re>λ_i/h_{ext} h afin de ne pas être au maximum. Il doit aussi se situer suffisamment loin aussi, afin d'avoir une résistance thermique avec son isolant au moins inférieure à celle du départ (c'est à dire sans isolant).



Résultats pour différentes valeurs de conductivité de l'isolant

15

$$(\cos^3 x - 3\cos x)' = -3\sin x\cos^2 x + 3\sin x = 3\sin x(1-\cos^2 x) = 3\sin^3 x$$

$$\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2-3x+2}\right)' = \frac{x^2-6x+7}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$[x^3(x^2-1)^2]' = x^2(x^2-1)(7x^2-3)$$

$$[x^4(x^2+1)^3(x-1)^2]' = 2x^3(x^2+1)^2(x-1)(6x^3-5x^2+3x-2)$$

$$\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)' = \frac{x^2+x-1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\sin^m(ax+b)\right)' = am\sin^{m-1}(ax+b)\cos(ax+b)$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)' = \frac{2}{3}\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$$

16

Utilisons pour répondre à la question la définition de la dérivée de la composition de deux fonctions : $[f\circ u(x)]' = \frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du}.\frac{du(x)}{dx}$.

Si la fonction initiale est paire =>f(-z)=f(z), c'est à dire dans notre cas lorsque u(x)=-x on a $\frac{df(-u)}{du} = \frac{df(u)}{du}$ et $\frac{d(u)}{dx} = -1$.

Donc, la dérivée d'une fonction paire est impaire.

Une démarche similaire conduit au fait que la dérivée d'une fonction impaire est paire.

17

$$y = (x+\sqrt{1+x^2})^2 = \left(x+\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$y' = 2\left(x+\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$y''=2\left(x+\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'\left(1+x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)+2\left(x+\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'$$

$$=2\left(1+x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1+x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)+2\left(x+\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-x^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$=2\left(1+x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2+2\left(x+\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-x^2\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

On vérifiera bien que $(1+x^2)y''+xy'-4y=0$

18

$$\left(\cos^2 x\right)'=-2\cos x\sin x$$

$$\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cos x$$

$$(\cos mx)'=-m\sin mx$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)'=\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$$

19

$$(1)\ \begin{cases} x=\text{sint} \\ y=\text{sin2t} \end{cases}$$

Pour dériver y=g(x), on applique le fait que t=f(x) et on écrit :

$y'_x=y'_t.t'_x$, avec $y'_t=2\cos(2t)$.

Le calcul de t'_x est plus délicat car on ne connaît que x=h(t)=sin t.

Il existe un théorème qui stipule que les dérivées de deux fonctions inverses sont inverses, ou encore en reprenant la notation ci dessus : $t'_x=\dfrac{1}{x'_t}$.

Appliqué à notre cas on obtient : $t'_x=\dfrac{1}{\cos t}$.

On obtient alors $\begin{cases} x = \sin t \\ y'_x = \dfrac{2\cos 2t}{\cos t} = 2\dfrac{2\cos^2 t - 1}{\cos t} = 4\cos t - \dfrac{2}{\cos t} \end{cases}$

De même on obtient ; $\begin{cases} x = \sin t \\ y''_x = \left(-4\sin t + 2\dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \right) \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$, qui devient $\begin{cases} x = \sin t \\ y''_x = -4\dfrac{\sin t}{\cos t} + 2\dfrac{\sin t}{\cos^3 t} \end{cases}$

et $\begin{cases} x = \sin t \\ y'''_x = \left(-\dfrac{4}{\cos^2 t} + \dfrac{2}{\cos^2 t} + 6\dfrac{\sin^2 t}{\cos^4 t} \right) \dfrac{1}{\cos t} = \left(-\dfrac{2}{\cos^3 t} + 6\dfrac{\sin^2 t}{\cos^5 t} \right) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \dfrac{t - 1}{t + 1} \\ y = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \end{cases}$

de (2a) on tire $t = \dfrac{x+1}{1-x}$ qui introduit dans (2b) conduit à : $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

d'où $y' = 2\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$; $y'' = 4\dfrac{x^3 - 3x}{\left(x^2+1\right)^3}$; $y''' = 12\dfrac{-x^4 + 6x^2 - 1}{\left(x^2+1\right)^4}$

INTEGRATION

1

$$\int A\cos(\omega t)dt = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$\int A\sin(\omega t)dt = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t)$$

$$\int Atg(\omega t)dt = -\frac{A}{2\omega}\ln(\cos(\omega t))$$

2

	$\int \cos(t)dt$	$\int \sin(t)dt$	$\int tg(t)dt$
$[0, \pi]$	0	2	0
$[0, \pi/2]$	1	1	∞
$[0, \pi/4]$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$
$[-\pi, \pi]$	0	0	0
$[-\pi/2, \pi/2]$	2	0	0
$[-\pi/4, \pi/4]$	$\sqrt{2}$	0	0

3

$$\int \frac{1}{\alpha x}dx = \frac{\ln(x)}{\alpha}$$

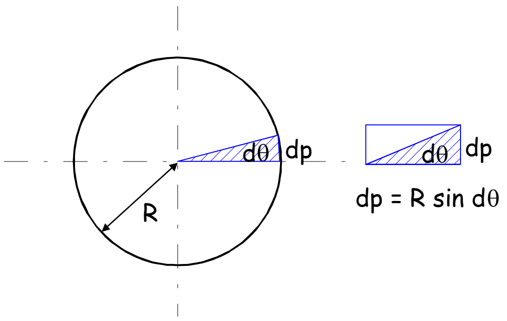
4

$$\int e^{-\alpha x}dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}$$

5

$$\int x^{\frac{1}{\alpha}}dx = \frac{\alpha}{1+\alpha}x^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}$$

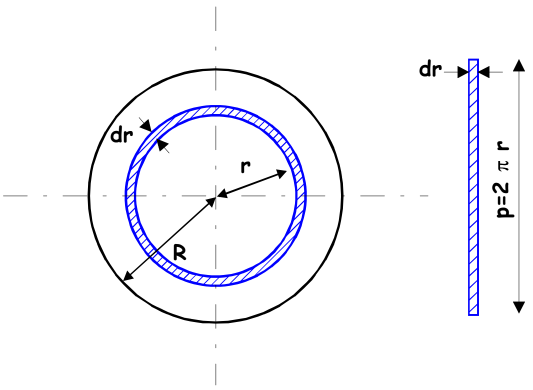
6



Considérant le demi rectangle hachuré, $dS = \frac{dp.R}{2}$, avec dp élément différentiel de périmètre : dp=R sin(dθ).

Alors $dS = \frac{R^2.d\theta}{2}$ et donc S= $\int_0^{2\pi}\frac{R^2 d\theta}{2} = \pi R^2$

7



Considérons la surface annulaire limitée par les cercles de rayons r et r+dr, la surface est dS=2πrdr

Ainsi, S= $\int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2$

8

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$$

9

$$\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

10

$$\int x^n \ln(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

11

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \frac{\cos(2x)+1}{2}dx = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{2}x$$

12

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{1}{2}x$$

13

$$\int \cos(x)\sin(x)\,dx = \frac{\sin^2(x)}{2}$$

14, 15, 16 et 17.

Dans tous les cas, $\delta W=-PdV$, où $P=f(V)$ est différent selon les transformations.

transformation	travail
isotherme PV=cte=A	$\int -\frac{A}{V}dV = -A\ln(V)$
isentrope PV^{γ}=cte=A	$\int -\frac{A}{V^{\gamma}}dV = -A\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}$
isochore V=cte	0
isobare P=cte	$P\Delta V$

18

$$\int x^2e^x dx = \left[x^2 + 2x + 2\right]e^x$$

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}dx = \int x^2.x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{x\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{15}\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = \int x\frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} - \frac{1}{2}\mathrm{Arctg}x$$

$$\int x\sin x dx = \sin x - x\cos x$$

$$\int x\,\mathrm{ch}x\,dx = \int x\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\int xe^{x}dx + \int xe^{-x}dx\right] = x\,\mathrm{sh}x - \mathrm{ch}x$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$\int xa^{x}dx = \int xe^{x\ln a}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}\left(x - \frac{1}{\ln a}\right)$$

19

Si on pose $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, on obtient $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{1+t+1-t}{(1-t)(1+t)}dt = \int \frac{1}{(1-t)}dt + \int \frac{1}{(1+t)}dt = -\ln(1-t) + \ln(1+t)$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int dt = t$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x\cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int \cos x\,dx - \sin^2 x\cos x\,dx$$
$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x + 1}{2}\right)dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$$

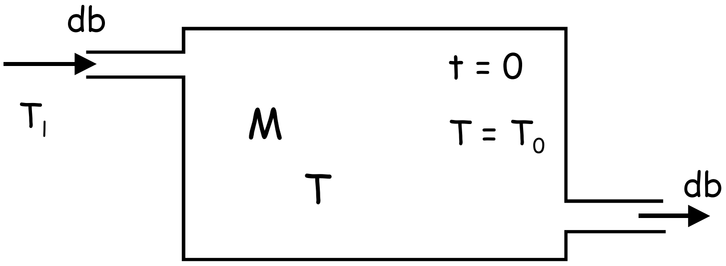
$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx = \int \sin^2 x\cos^2 x\cos x\,dx = \int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,dx$$
$$= \int \left(\sin^2 x\cos x - \sin^4 x\cos x\right)dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}$$

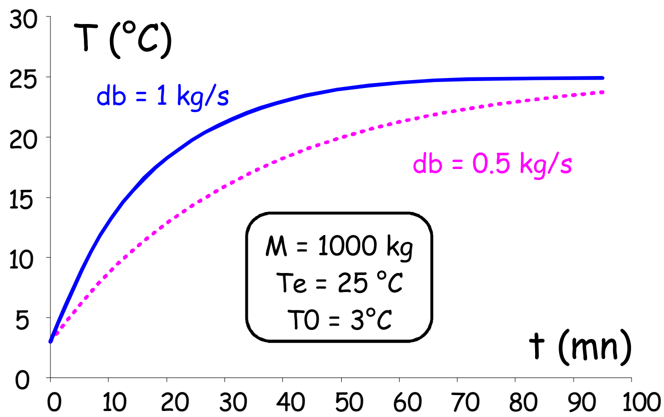
$$\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = \mathrm{tg}x - x$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1

La variation d'énergie interne de la masse M de fluide contenue dans le réservoir est égale à : $M.C_p.\frac{dT}{dt} = db.C_p.(T_{entrée} - T)$ où T (variable) représente la température du fluide à la sortie du réservoir (donc celle à l'intérieur).





On a alors $\frac{dT}{(T_{entrée} - T)} = \frac{db}{M}dt$, d'où après intégration :

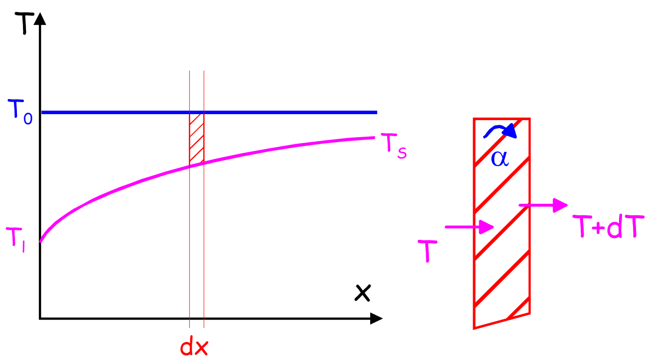
$$\ln(T - T_{entrée}) = -\frac{db}{M}t + A,$$

où A est une constante d'intégration calculée à partir des conditions aux limites. On obtient au final : $\frac{(T - T_{entrée})}{T_0 - T_{entrée}} = e^{-\frac{db}{M}t}$

2

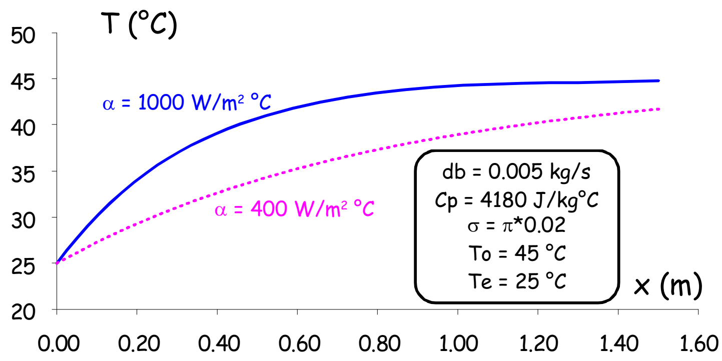
La variation d'energie interne de la tranche de fluide d'épaisseur dx est égale à : $0 = \alpha.dS.(T_0 - T) - db.C_p.dT = \alpha.\sigma.dx.(T_0 - T) - db.C_p.dT$, que l'on peut encore écrire :

$$\frac{dT}{(T_0 - T)} = \frac{\alpha.\sigma}{db.C_p}dx,$$



Cette expression, donne après intégration et prise en compte des conditions aux limites :

$$\frac{(T - T_0)}{T_I - T_0} = e^{-\frac{\alpha.\sigma}{db.C_p}x}$$

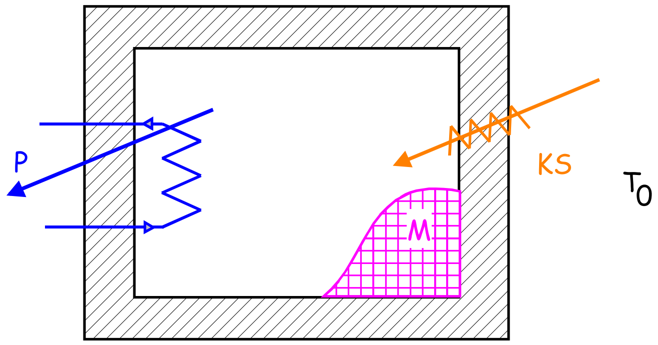


Répartition spatiale des températures le long de l'échangeur, influence du coefficient d'échange

3

La variation d'énergie interne de la masse M de viande est fonction de la qualité de l'isolation thermique du camion et de la puissance P de refroidissement installée selon :

$$M.C_p.\frac{dT}{dt} = KS(T_0 - T) - |P| = KS[(T_0 - T) - \frac{|P|}{KS}]$$



L'expression précédente devient, après intégration et prise en compte des conditions initiales :

$$T - T_0 + \frac{|P|}{KS} = \frac{|P|}{KS} e^{-\frac{K.S}{M.C_p}t}$$

4

co-courant	contre-courant
$\phi = H_g S \frac{(T_{cs} - T_{fs}) - (T_{ce} - T_{fe})}{\ln \frac{(T_{cs} - T_{fs})}{(T_{ce} - T_{fe})}}$	$\phi = H_g S \frac{(T_{ce} - T_{fs}) - (T_{cs} - T_{fe})}{\ln \frac{(T_{ce} - T_{fs})}{(T_{cs} - T_{fe})}}$

5

L'ED est de la forme $M.C_p.\frac{dT}{dt} = h.S.(T_0 - T) - P = hS[(T_0 - T) - \frac{P}{hS}]$

La solution est alors, après intégration et prise en compte des conditions aux limites :

$$T - T_0 + \frac{P}{hS} = \frac{P}{hS} e^{-\frac{h.S}{M.C_p}t}$$

à t=0, la climatisation est mise en route, on calcule alors le temps t nécessaire pour que T atteigne la valeur T1 : $t = -\frac{MC_p}{hS} \ln[\frac{hS(T_1 - T_0) + P)}{P}$

6

L'industriel doit connaître à chaque instant la valeur de son stock de froid S(t).

Ce dernier varie soit à cause de la consommation C de son process (diminution de S(t)), soit à cause de son système P de production de froid (augmentation de S(t)).

L'ED relative au cas général est alors la suivante : $\frac{dS}{dt} = P + C$ où l'on voit bien que l'évolution de S sera linéaire au cours du temps.

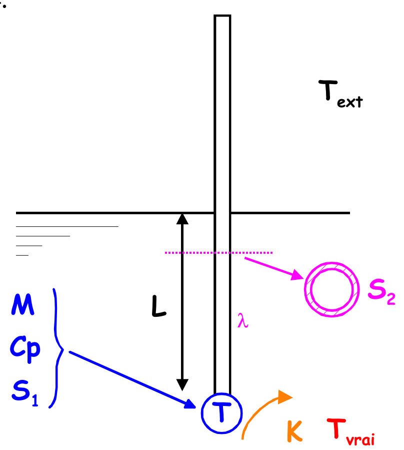
Mais le système de froid ne se mettra en route que lorsque S aura atteint un certain seuil S0 si bien qu'on peut avoir trois régimes.

Consommation seule avant d'atteindre S0;
Consommation et production en même temps;
Production seule (en période creuse de la journée) avant d'atteindre la valeur initiale de S.

L'industriel a donc pour soucis de vérifier qu'à la fin de sa journée (24 h), le stock soit a nouveau au seuil initial avant de recommencer une nouvelle période de 24 heures, sinon il devra augmenter la valeur de P.

7

L'application du premier principe au thermocouple donne : $\frac{dU}{dt} = \dot{Q}_{conv} + \dot{Q}_{cond}$ avec comme conditions initiales (t=0) : $T=T_{ext}$.



D'où, $MCp\frac{dT}{dt} = KS_1(T_{vrai} - T) + \frac{\lambda S_2}{L}(T_{ext} - T)$,

ou encore $MCp\frac{dT}{dt} = (KS_1 + \frac{\lambda S_2}{L})(\frac{KS_1 T_{vrai} + \frac{\lambda S_2}{L}T_{ext}}{KS_1 + \frac{\lambda S_2}{L}} - T)$.

La séparation des variables en temps (dt) et en température (dT) conduit à :

$$\frac{dT}{(\frac{KS_1 T_{vrai} + \frac{\lambda S_2}{L}T_{ext}}{KS_1 + \frac{\lambda S_2}{L}} - T)} = \frac{(KS_1 + \frac{\lambda S_2}{L})}{MCp}dt$$

qui une fois intégrée, donne $-\mathrm{Ln}\left(\dfrac{KS_1T_{vrai}+\dfrac{\lambda S_2}{L}T_{ext}}{KS_1+\dfrac{\lambda S_2}{L}}-T\right)=\dfrac{(KS_1+\dfrac{\lambda S_2}{L})}{MCp}t+C$

La prise en compte des conditions initiales ($t=0$, $T=T_{ext}$) permet de lever l'inconnue C :

$$-\mathrm{Ln}\left(\frac{KS_1T_{vrai}+\frac{\lambda S_2}{L}T_{ext}}{KS_1+\frac{\lambda S_2}{L}}-T_{ext}\right)=0+C$$

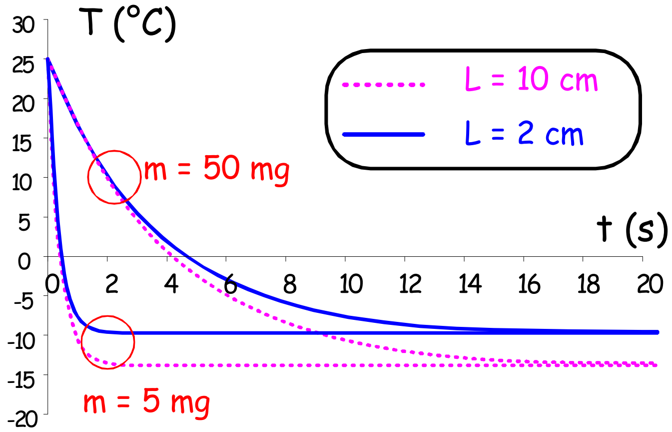
L'expression devient alors :

$$-\mathrm{Ln}\left(\frac{\dfrac{KS_1T_{vrai}+\frac{\lambda S_2}{L}T_{ext}}{KS_1+\frac{\lambda S_2}{L}}-T}{\dfrac{KS_1T_{vrai}+\frac{\lambda S_2}{L}T_{ext}}{KS_1+\frac{\lambda S_2}{L}}-T_{ext}}\right)=\frac{(KS_1+\frac{\lambda S_2}{L})}{MCp}t \quad \Rightarrow \quad \frac{\dfrac{KS_1T_{vrai}+\frac{\lambda S_2}{L}T_{ext}}{KS_1+\frac{\lambda S_2}{L}}-T}{\dfrac{KS_1T_{vrai}+\frac{\lambda S_2}{L}T_{ext}-T_{ext}}{KS_1+\frac{\lambda S_2}{L}}}=e^{-\frac{(KS_1+\frac{\lambda S_2}{L})}{MCp}t}$$

Soit finalement : $T=\dfrac{KS_1T_{vrai}+\frac{\lambda S_2}{L}T_{ext}}{KS_1+\frac{\lambda S_2}{L}}-\left[\dfrac{KS_1T_{vrai}+\frac{\lambda S_2}{L}T_{ext}}{KS_1+\frac{\lambda S_2}{L}}-T_{ext}\right]e^{-\frac{(KS_1+\frac{\lambda S_2}{L})}{MCp}t}$

Exemple :

Conductivité λ	15 W/m.C
Coef. d'ech K	1000 W/m^2 °C
S_1	Cube de coté 1 mm
S_2	R_{ext} 2 mm ; R_{int} 1.9 mm
Cp	500 J/kg°C
T_{ext}	25 °C
T_{vrai}	-15 °C



Influence sur la réponse du capteur de température :

- De la longueur du doigt de gant : incidence sur la justesse de la mesure
- De la masse du capteur : incidence sur la rapidité de mise en température.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{2V_1 \cos\theta}{\rho^3} \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{V_1 \sin\theta}{\rho^2}$$

$$dV = -\frac{2V_1 \cos\theta}{\rho^3} d\rho - \frac{V_1 \sin\theta}{\rho^2} d\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = +\frac{6V_1 \cos\theta}{\rho^4} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -\frac{V_1 \cos\theta}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \theta} = \frac{2V_1 \sin\theta}{\rho^3} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \rho} = \frac{2V_1 \sin\theta}{\rho^3}$$

2

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d\rho = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + x^2 (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + y^2 (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial x} = -xy(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = -xy(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

3

$$P(V, T) = \frac{nRT}{V} \; ; \; T(P, V) = \frac{PV}{nR} \; ; \; V(P, T) = \frac{nRT}{P} \; ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V} = \frac{P}{T} \qquad \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2} = -\frac{P}{V}$$

...

4

$$\frac{\partial^2 P}{\partial T^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{2P}{V^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V \partial T} = -\frac{nR}{V^2} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial T \partial V} = -\frac{nR}{V^2}$$

5

$$(P+\frac{a}{V^2})(V-b)=RT \text{ donc } P=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{RT}{(V-b)^2}+2\frac{a}{V^3} \qquad \frac{\partial P}{\partial T}=\frac{R}{(V-b)}$$

6

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}=\frac{2RT}{(V-b)^3}-6\frac{a}{V^4} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial T^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial T\partial V}=-\frac{R}{(V-b)^2} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial V\partial T}=-\frac{R}{(V-b)^2}$$

7

On a U, différentielle exacte, c'est à dire que pour les variables S et V, on peut écrire :

$$dU=\frac{\partial U}{\partial S}dS+\frac{\partial U}{\partial V}dV$$

or, nous savons aussi que : $dU = TdS - PdV$

aussi, $\frac{\partial U}{\partial S}=T$ et $\frac{\partial U}{\partial V}=-P$

U étant une différentielle exacte, $\frac{\partial^2 U}{\partial V\partial S}=\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial V}$

Or, $\frac{\partial^2 U}{\partial V\partial S}=\frac{\partial T}{\partial V}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial S\partial V}=-\frac{\partial P}{\partial S}$

Donc $\frac{\partial T}{\partial V} \quad = \quad -\frac{\partial P}{\partial S}$

8

Les expressions du volume et de la surface d'une boîte de conserve de longueur L et de diamètre D sont :

$$V=\frac{\pi D^2 L}{4}$$

$$S=\pi DL+2.\frac{\pi D^2}{4}$$

Leurs différentielles sont respectivement égales à :

$$dV=\frac{\pi D^2}{4}dL+\frac{\pi DL}{2}dD$$

$$dS=\pi DdL+(\pi L+\pi D)dD$$

A volume constant (dV=0), on a $\frac{D}{2}dL=-LdD$, que l'on remplace dans l'expression de dS pour obtenir : $dS=(\pi D-\pi L)dD$, qui s'annule (présence d'un extremum) lorsque D=L.

9

Un point situé sur un cercle centré en O(0, 0) a pour coordonnées x et y. Sur un quart du cercle et pour un angle $d\theta$ fixé, une variation de dx s'accompagne d'une variation de dy. La surface élémentaire dS limitée par les droites x, x+dx et la droite d'angle $d\theta$ nous donne dS=y(dx)+ $\frac{dx.dy}{2}$. Or les éléments différentiels étant des infiniment petits du premier ordre, on peut négliger le terme du second ordre.

Ainsi, dS=ydx. Or, tg($d\theta$)= $\frac{y}{x}$ et le développement de tg($d\theta$) est égal à $d\theta$, si bien que dS=$d\theta$xdx. Cette surface étant définie pour un quart de cercle, on a alors :

$$S = 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{x=0}^{R} d\theta x dx = 4\frac{\pi}{2}\frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

10

Sur un quart de sphère, l'élément différentiel dr multiplié par la surface πr^2 définit l'élément de volume élémentaire dV=πr^2dr

Aussi le volume total est égal à :

$$V = 4\int_0^R \pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

11

Sur un quart de sphère, le barreau de périmètre p=2πr dont les cotés ont pour longueur dr défini l'élément différentiel de volume dV=2 πr.dr.dr

Le volume total est donc V=4 $\int_0^R\int_0^R 2\pi r.dr.dr = \frac{4}{3}\pi R^3$

12

L'élément de volume élémentaire pris dans un quart de sphère est égal à dr.dr.r.sin(d θ), encore égal à r.dθ.dr.dr.

Le volume entier est donc égal à :

$$V = 4\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^R d\theta r dr dr = 8\pi\int_0^R\int_0^R r dr dr = 4\pi\int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

13

$$\boxed{z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4y^2\frac{y^2 - 3x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4x^2 y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^2\frac{x^2 - 3y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8\frac{x^3y - xy^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\boxed{z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2Ax + 2By \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2A$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2Bx + 2Cy \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2C$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2B = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

14

z = f(u), avec u = xy.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = yf'(u) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = xf'(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\left[yf'(u)\right] = y\frac{\partial z}{\partial x}f'(u) = y\frac{\partial z}{\partial u}f'(u).\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial y}\left[xf'(u)\right] = x\frac{\partial z}{\partial y}f'(u) = x\frac{\partial z}{\partial u}f'(u).\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\left[yf'(u)\right] = 1.f'(u) + y\frac{\partial z}{\partial u}f'(u).\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) + xyf''(u) = f'(u) + uf''(u)$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$